Diplomado: Enseñanza de las matemáticas

Módulo 3. Diseño y desarrollo de la actividad docente. Parte II

Enero 2013

Material del Participante. Módulo 3 para el Diplomado "*Enseñanza de las matemáticas",* fue elaborado en diciembre de 2012 por la Universidad de Sonora, bajo convenio de colaboración con el Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica y el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Universidad de Sonora

Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Rector

Dr. Enrique Fernando Velázquez Contreras
Secretario General Académico

Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica

Ing. Octavio Corral Torres
Director General

Mtro. Martín Antonio Yépiz Robles
Director Académico

Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Profr. Julio Alfonso Martínez Romero
Director General

Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela
Director Académico

Coordinación:

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Autores:

Ramiro Ávila Godoy

Agustín Grijalva Monteverde

José María Bravo Tapia

Silvia Elena Ibarra Olmos

Manuel Alfredo Urrea Bernal

María Antonieta Rodríguez Ibarra

Edición:

Agustín Grijalva Monteverde
José María Bravo Tapia

Primera Edición: 2012

D.R. © Universidad de Sonora 2012

Blvd. Rosales y Luis Encinas s/n. Col. Centro

C.P.83000, Hermosillo, Sonora, México.

ISBN en trámite

ÍNDICE

Módulo 3. Diseño y desarrollo de la actividad docente. Parte II

Introducción

Este Módulo es una continuación programática del anterior, en el que se proponen actividades didácticas con el propósito de analizar algunos aspectos importantes de las actividades de enseñanza de las matemáticas, el diseño de las mismas y su relación con las competencias que se promueven con los estudiantes y las competencias profesionales de los profesores.

Como señalamos en el Módulo anterior, los contenidos matemáticos desarrollados en las actividades didácticas fueron seleccionados de los programas de materia de las instituciones participantes y de las observaciones realizadas durante la puesta en escena del Módulo 1.

De forma similar a los dos Módulos anteriores, este material está diseñado para trabajarse en 40 horas presenciales, con el compromiso por parte de los asistentes de dedicar 10 horas extra clase para realizar las tareas asignadas, las cuales constituyen un producto importante del Diplomado y serán evaluadas como tales.

Las actividades serán conducidas por un profesor responsable del Módulo, quien proporcionará las indicaciones correspondientes en cada ocasión, complementando las que se indican en el escrito.

En la dinámica de trabajo en el aula, continuaremos con los espacios reservados para el trabajo individual, otros para el trabajo en equipo, así como espacios destinados al trabajo grupal.

El Módulo está organizado en actividades agrupadas en cuatro secciones, la primera de ellas centrada en actividades de Geometría Analítica y las dos siguientes en situaciones problema referentes al estudio de la variación. En la última sección se propone la reflexión de nuestra actividad en concordancia con los lineamientos curriculares del bachillerato.

En el Segundo Módulo las actividades que se mostraron fueron creadas a partir de información extraída de documentos como la Encuesta Nacional de Salud, o de situaciones cotidianas como el cálculo del Índice de Masa Corporal.

En este Módulo se muestra que los profesores tenemos también a nuestra disposición otros elementos para diseñar actividades didácticas, analizando situaciones como: la ubicación de un lugar en una carretera, el análisis de la variación en contextos como el llenado de agua de un recipiente y, por último, recurriendo a los problemas tradicionales de los textos de matemáticas, pero con una intencionalidad didáctica diferente.

SECCIÓN 1

Actividad 1. Ubicación de puntos en una línea

En esta sección realizaremos algunas actividades centradas en el problema de ubicar puntos en una línea.

1.1 Ubicando lugares en la carretera

Trabajando de forma individual e independiente, resuelva cada una de las situaciones que se exponen en cada uno de los problemas que se enuncian a continuación.

Al viajar por una carretera puede observarse, a la orilla de la misma, cada cierto tiempo, un señalamiento (un número) que indica la ubicación del lugar (punto). Estos señalamientos son de gran utilidad para los viajeros pues les permiten resolver muchos problemas relacionados con su viaje.

a) Describa el procedimiento que, en su opinión, se utiliza para decidir los puntos en los cuales se colocará un número y explique qué significa la afirmación hecha en el párrafo inicial de que dicho número *indica la ubicación del lugar.*

b) Reflexione y enliste los problemas que, en su opinión, un viajero puede resolver utilizando los señalamientos mencionados. Haga una lista de tales problemas.

c) Organizados en equipos de tres personas, comenten sus respuestas a cada uno de los dos problemas anteriores y la manera cómo llegaron a ellas, compárenlas y, de haber diferencias en las respuestas o en las formas de obtenerlas, analícenlas y modifiquen, cuando así lo decidan, aquello que consideren conveniente cambiar.

1.2 El mapa carretero de Sonora

Lea detenidamente los siguientes párrafos, realice las actividades propuestas y, trabajando individualmente, conteste las preguntas que se formulan posteriormente.

En la Figura 1 se observa una parte del Mapa de Sonora en el que está señalada la carretera que une Cd. Obregón con Hermosillo, en la cual puede observarse la ubicación de algunos puntos, en particular los correspondientes a las ciudades extremas de dicha carretera, pero también los correspondientes a las localidades intermedias como son los casos de Guaymas y Empalme.

Figura 1. Mapa de Sonora

Coloque el cursor sobre la imagen para seguir el hipervínculo a la dirección electrónica para observar un mapa de la ciudad de Hermosillo que permite obtener la imagen satelital de la ciudad y seguir la carretera internacional. Haciendo un *zoom* en algún punto cercano a la "entrada sur a" (o "salida sur de") Hermosillo, puede ver el número que indica la ubicación del punto; luego haciendo *zoom* en alguna otra parte de la carretera, puede localizar otro punto donde también se haya colocado un número. Habiendo hecho lo indicado, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué número está a la entrada de Hermosillo y qué está indicando dicho número?

b) ¿Habrá algún punto de la carretera en el que esté el número 0 (cero)? Si considera que sí hay, ¿dónde supone que estará?; pero si considera que no hay, explica por qué cree que no haya.

c) Cuando se viaja por esa carretera de Hermosillo a Empalme, se puede entrar por la Colonia Bellavista, donde se encuentra el número 116, ¿Qué indica ese número?

d) ¿Qué distancia hay que recorrer por esa carretera para ir de la salida de Hermosillo a la entrada de Empalme?

e) Sabiendo que cuando se viaja de Empalme a Cd. Obregón, al subir a la carretera, el primer número que aparece es el 114. ¿En qué km estará ubicado el poblado de Vícam, si su distancia a Cd. Obregón es 20 km menor que su distancia a Empalme?

f) ¿Qué punto de la carretera está a la misma distancia de la entrada a Hermosillo que de la salida de Guaymas?

g) Cuando viaja de Hermosillo a Guaymas, cuando ha recorrido dos terceras partes de la distancia al puerto, está la desviación a

Bahía Kino; si sabe que la entrada a Guaymas está en el kilómetro 130. ¿En qué kilómetro está la desviación mencionada?

1.3 Reflexiones didácticas

Trabajando ahora en equipo, hagan lo que se solicita en los siguientes incisos.

a) Comenten sus respuestas a los problemas planteados, así como la manera en que las han obtenido y establezcan cuáles son las respuestas correctas y cuáles las diversas maneras de obtenerlas (si es que hubo más de una manera).

b) Formulen al menos cinco problemas más relacionados con la ubicación de los puntos de la carretera a la que refiere la actividad 1.2.

c) Analicen, comenten y determinen en el equipo:

Los conocimientos matemáticos (conceptuales y procedimentales), que se ponen en juego al resolver estos problemas.

Las competencias (disciplinares y genéricas) que se ponen de manifiesto (o pueden pretender desarrollarse) en el proceso de resolución de estos problemas.

d) Comenten en el equipo y acuerden el uso que podrían dar a esta actividad con sus alumnos. Señalando:

i) Los objetivos a alcanzar

ii) Las competencias a desarrollar (o promover)

iii) La metodología que utilizarían

iv) La forma en que la evaluarían

1.4 Primera Institucionalización local

Esta actividad es de carácter grupal y se desarrollará bajo la conducción del instructor.

Expongan al resto del grupo, las reflexiones que hayan hecho y los acuerdos a que hayan llegado en el equipo con relación a la actividad que se ha desarrollado, analizado y comentado. Con base en las reflexiones hechas y las conclusiones a que hayan llegado a través del proceso de estudio que se ha llevado a cabo, a partir de la actividad propuesta, cada uno de ustedes escriba, como tarea, un ensayo de no menos de dos cuartillas en el que expresen dichas reflexiones y conclusiones.

Actividad 2. Los problemas del plano

2.1 Introducción

Lea detenidamente las siguientes líneas.

Lo que hoy se conoce como *Geometría Analítica* surge como un método (ideado por René Descartes) para resolver los problemas relativos al espacio. Muchos de estos problemas ya habían sido resueltos desde muchos años antes (más o menos veinte siglos) por los geómetras griegos utilizando un método basado en el uso de una regla (utilizada para trazar rectas) y un compás (utilizado para trazar circunferencias); que aparece expuesto en el libro titulado *Los Elementos*, escrito por Euclides en el siglo III A.C.

Una crítica que Descartes hacía de los antiguos geómetras consistía en plantear que obtenían sus resultados por medio de un método analítico, esto es, suponían que se tenía un resultado y se procedía a la inversa, por medio de afirmaciones consideradas válidas, obtenían dicho resultado. Pero presentaban sus trabajos como si hubieran procedido a la inversa, esto es, como si hubieran ido realizando acciones hasta encontrar el resultado propuesto (a esta forma de proceder se le asocia con el llamado método sintético).

Por ejemplo cuando nos planteamos encontrar dos números que sumados den 20 y multiplicados den cien, planteamos las ecuaciones $a + b = 20$ y $ab = 100$, como si efectivamente existieran las soluciones *a* y *b*, procediendo entonces a determinar sus valores numéricos.

Esta manera de abordar los problemas tiene sus orígenes en la Geometría desarrollada por los griegos desde hace más de 2000 años y Descartes la emplea como método para resolver los problemas del espacio, junto con los métodos algebraicos desarrollados por Vieta y que hoy conocemos como Álgebra.

El punto de partida de Descartes fue idear una manera de representar los objetos más elementales del espacio, los puntos, por medio de números, creando lo que hoy conocemos como Sistema de Coordenadas Cartesianas. Esta representación permite resolver algunos problemas como los siguientes:

- Conocida la coordenada de un punto, ubicarlo en la recta
- Calcular la distancia entre dos puntos de la recta (equivalente a calcular la longitud de un segmento determinado)
- Determinar la coordenada de un determinado punto de la recta que cumple una cierta condición. Ejemplos clásicos de este tipo de problemas son:

  - Determinar la coordenada del punto medio de un segmento del que se conocen las coordenadas de sus extremos
  - Determinar la coordenada de un punto que divide a un segmento en una razón dada
  - Determinar la coordenada de un punto cuyas distancias a dos puntos dados estén en una razón dada

Partiendo de elementos básicos como los que señalamos en los párrafos anteriores se sientan las bases de la Geometría Analítica, dando lugar a un método para el estudio de la Geometría, y con ello para el estudio de los problemas de modelar el espacio en el cual vivimos.

En la evolución de la Geometría Analítica, se considera hoy que sus dos problemas fundamentales son los siguientes:

Dado un lugar geométrico (conjunto de puntos que satisfacen una determinada característica), determinar una ecuación que lo represente.

Dada una ecuación, determinar el lugar geométrico al que corresponde.

2.2 Objeto de estudio de la Geometría Analítica

Trabajando en equipo, contesten lo que se solicita.

a) ¿Qué estudia la geometría analítica? ¿Cuál es su método y en qué consiste?

b) ¿Cuáles lugares geométricos se estudian en los cursos de CONALEP y cuáles en el caso del Colegio de Bachilleres?

c) ¿Cuáles temas son comunes? ¿Cuáles se estudian en un subsistema de bachillerato pero no en el otro?

Actividad 3. El problema de la determinación de la ecuación que representa a una recta en el plano

3.1 La ecuación de la recta

Trabajando individualmente resuelva los siguientes problemas.

a) Dados dos puntos del plano, éstos determinan una recta ¿por qué?

b) Considere la recta que pasa por los puntos cuyas coordenadas son (0,0) y (4, 4)

i) Localice los puntos y trace la recta
ii) Determine las coordenadas de al menos tres puntos más que estén en esa recta
iii) Determine las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los puntos que se te dieron para trazar la recta
iv) Si la abscisa del punto A, que está en la recta, es $\frac{-3}{4}$, ¿Cuál es su ordenada?
v) Si la ordenada del punto B, que está en la recta, es $\sqrt{2}$, ¿Cuál es su abscisa?
vi) ¿Qué tienen en común las coordenadas de todos los puntos de esta recta?
vii) Si tenemos un punto P de coordenadas (x, y), ¿En qué caso el punto P estará en la recta?

La relación que existe entre las coordenadas de los puntos de la recta, es decir la relación entre el valor de x *y el valor de* y, *que seguramente expresó escribiendo que* x *debe ser igual a* y *o simplemente escribiendo* $y = x$ *es la ecuación que representa a la recta que trazó, porque, efectivamente, todo punto que está en la recta cumple con la condición de que coordenada* x *es igual a su coordenada* y *y de la misma manera, toda pareja de números que cumplan con la condición establecida en la ecuación son coordenadas de un punto de la recta.*

c) Siga ahora con los siguientes casos.

i) Utilice el mismo sistema de coordenadas en el que trazó la recta del problema anterior (inciso b) y trace la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(4, 5)

ii) Siga las mismas instrucciones del problema del inciso b, es decir, realice las actividades indicadas en los incisos i) a vii) y establezca la ecuación de esta segunda recta

d) Conteste ahora las siguientes cuestiones.

i) Sabiendo que $y = x + 2$ es la ecuación de una recta, ¿qué debe hacer para trazarla?

ii) ¿Cómo determina el valor de la ordenada del punto P, si conoce el valor de la abscisa y sabe que dicho punto está en la recta representada por la ecuación dada?

iii) Y si conoce el valor de la ordenada de un punto que está en la recta, ¿cómo determina el valor de su abscisa?

iv) Determine las coordenadas de los puntos donde la recta corta a los ejes de coordenadas, localice los puntos y trace la recta, hágalo en el mismo sistema de coordenadas en el que trazó las rectas de los dos primeros problemas.

e) Ahora proceda con los casos siguientes.

Utilizando el mismo sistema de coordenadas donde trazó las rectas anteriores, trace las rectas cuyas ecuaciones son:

i) $y = x + 3$
ii) $y = x - 1$
iii) $y = x - 2$
iv) $y = x + \frac{1}{2}$
v) $y = x - \frac{7}{3}$

f) Para concluir esta parte, haga lo que se pide a continuación.

i) Observe las rectas trazadas en los cuatro problemas anteriores y determine

- ¿En qué se parecen?
- ¿En qué se diferencian?

ii) Observe las ecuaciones correspondientes a cada una de las rectas que trazó y determine

- ¿En qué se parecen?
- ¿En qué se diferencian?

iii) Seguramente resultó fácil darse cuenta que todas las ecuaciones son de la forma $y = x + b$, donde b, en cada caso, fue diferente.

- ¿Qué indica el valor de b?
- ¿Qué sucede con la recta a medida que el valor de b aumenta?
- ¿Qué sucede con la recta si el valor de b es negativo?

iv) ¿A qué atribuye que todas las rectas trazadas hayan resultado paralelas?

Actividad 4. Reflexiones

4.1 Organizados en equipos de tres personas, comenten sus respuestas a cada uno de los problemas y la manera cómo llegaron a ellas, compárenlas y, de haber diferencias en las respuestas o en las formas de obtenerlas, analícenlas y modifiquen, cuando así lo decidan, aquello que consideren que no hicieron apropiadamente.

Actividad 5. Continuando con la recta

5.1 Elementos centrales de la ecuación de la recta

Utilizando un nuevo sistema de coordenadas trace las rectas cuyas ecuaciones son:

i) $y = x$
ii) $y = 2x$
iii) $y = 3x$
iv) $y = 4x$
v) $y = 10x$
vi) $y = \frac{1}{2}x$
vii) $y = \frac{1}{4}x$
viii) $y = \frac{1}{10}x$

5.2 Identificando las rectas

a) Observe las rectas trazadas y determine
   - ¿En qué se parecen?

   - ¿En qué se diferencian?

b) Observe las ecuaciones correspondientes a cada una de las rectas que trazó y determine
   - ¿En qué se parecen?

   - ¿En qué se diferencian?

c) Seguramente resultó fácil darse cuenta que todas las ecuaciones son de la forma $y = mx$, donde m, en cada caso fue diferente.
   - ¿Qué indica el valor de m?

   - ¿Qué sucede con la recta a medida que el valor de m aumenta?

   - ¿Qué puede decir de la recta si el valor de m es negativo?

   - En general ¿qué puede decir de todas las rectas cuya ecuación es de la forma $y = mx$?

5.3 Reflexión en equipo

En el equipo comenten sus respuestas a cada uno de los problemas y la manera cómo llegaron a ellas, compárenlas y, de haber diferencias en las respuestas o en las formas de obtenerlas, analícenlas y modifiquen, cuando así lo decidan, aquello que no hicieron adecuadamente.

a) En el caso de la ecuación $y = x$, ¿Cuál es el valor de m y cuál el valor de b?

b) De las reflexiones anteriores se desprende que las rectas del plano se representan analíticamente por medio de alguna ecuación de la forma $y = mx + b$. Analicen y comenten en el equipo lo que indican la m y la b en cada una de las siguientes ecuaciones y tracen, en cada caso, la recta representada:
   - $y = 2x + 1$
   - $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$
   - $y = -x + 3$
   - $y = -3x - 2$
   - $y = 10x - 5$

5.4 Segunda institucionalización local

Bajo la conducción del instructor, los participantes analizarán la forma en la cual se introdujo el estudio de la ecuación de una línea recta y se discutirán otras posibilidades para hacerlo, en concordancia con los lineamientos curriculares.

SECCIÓN 2

Actividad 1. La variación en el llenado y vaciado de recipientes

1.1 El problema de la percepción de las variables y el establecimiento de las relaciones de dependencia

Trabajando de manera personal (independiente) realice las tareas indicadas en cada uno de los tres problemas siguientes:

Situación 1

El recipiente de la Figura 2 es un Prisma Cuadrangular apoyado en una superficie horizontal por medio de una de sus aristas.

Si en este recipiente se vierte agua para irlo llenando, observe, analice y enumere todas las magnitudes que percibe varían durante el llenado.

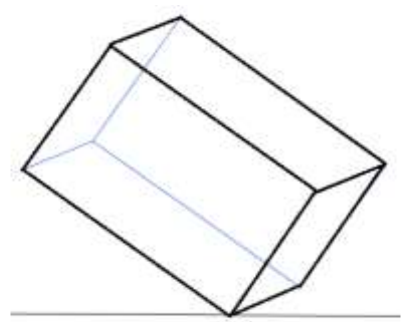


Figura 2. Prisma Cuadrangular

Situación 2

Sabiendo que en todo proceso, la variación de una magnitud origina la variación de otra o de otras y que al estudiar la manera en que una magnitud varía en un proceso, es necesario establecer con respecto a qué otra magnitud o magnitudes se está estudiando la variación. Elija alguna de las magnitudes que enumeró en la tarea anterior y determine con respecto a qué otra magnitud puede estudiarse su variación.

Situación 3

Enliste por lo menos cinco relaciones de dependencia entre las variables que señaló en el problema 1, que pueden ser estudiadas.

2.2 Formen ahora equipos de tres personas y realicen las tareas indicadas en el siguiente párrafo.

Comenten las magnitudes que cada uno enumeró en el Problema 1 y vean si coinciden o no en cuanto a que se trata de las magnitudes que varían durante el llenado de tal manera que logren ponerse de acuerdo en las magnitudes que deben aparecer en la lista. Luego hagan lo mismo con las relaciones que enlistaron en los problemas 2 y 3. Cuando se hayan puesto de acuerdo en el equipo, elaboren una lista de las magnitudes que varían al ir llenando el recipiente y otra de las relaciones de dependencia que hayan elegido para ser estudiadas.

Actividad 2. La variación en el llenado y vaciado de recipientes (Continuación)

2.1 El problema de la representación gráfica de la variación

Trabajando en equipo, resuelvan las siguientes situaciones.

Situación 1

Utilicen el embudo y el agua que les proporcionó el instructor para ir llenando el recipiente, al hacerlo, observen, analicen y comenten:

- La variación del área de la sección transversal del agua con respecto a la altura de la misma.

- La variación de la rapidez con que varía el área de la sección transversal del agua con respecto a la altura de la misma

Cuando se hayan puesto de acuerdo en el equipo de cómo fue la variación observada, tanto del área como de la rapidez con que varía el área, descríbanlas por escrito y represéntenlas gráficamente.

Situación 2.

Ahora, bajo la conducción del instructor, expongan al resto del grupo, las reflexiones que hayan hecho y los acuerdos a que hayan llegado en el equipo en relación con la actividad que se ha desarrollado, analicen y comenten procurando, en todo momento dar argumentos para justificar sus conclusiones.

Escuche y analice las reflexiones, conclusiones y argumentaciones que expongan los diversos equipos y contrástelas con las que hizo en el suyo y, si no está de acuerdo con ellos, expréselo y argumente por qué; o si los argumentos de algún otro de los equipos le hace ver que está equivocado en algo, modifique sus conclusiones para hacerlas coherentes con su nueva versión del problema.

Situación 3. Usando software

Abra el archivo prisma.ggb ó siga el hipervínculo prisma, ó bien, entre a la dirección electrónica http://www.mat.uson.mx/jmbravo y en equipo analicen las variaciones indicadas a continuación. Observen el llenado del recipiente simulado con el software *Geogebra*.

Cambien el ángulo de inclinación que forma la cara lateral del recipiente con la superficie en la que está apoyado, observen de nuevo el llenado y vuelvan a analizar y comentar cómo varió el área de la sección transversal del agua con respecto a la altura y de nueva cuenta, describan y representen dicha variación por medio de una gráfica.

a) Repitan el experimento modificando de nuevo el ángulo de inclinación (háganlo las veces que consideren necesario) para contestar las siguientes preguntas:
   - ¿Qué relación hay entre el ángulo de inclinación y la variación del área con respecto a la altura?
   - ¿Cómo se refleja esa relación en la gráfica?

- Si el ángulo de inclinación fuera de 0° ¿Cómo sería la variación y cómo la gráfica?

- ¿Y si el ángulo fuera de 90°?

- ¿Para qué valor de la altura el área es máxima?

- ¿Para qué ángulo de inclinación el área máxima de la sección transversal es la mayor de todas las máximas?

- ¿Para qué ángulo de inclinación, la altura máxima del agua es la mayor de todas las alturas máximas?

- ¿De qué variables depende el valor del ángulo de inclinación que hace que el área máxima de la sección transversal sea la mayor de todas las áreas máximas?

- ¿En qué caso la mayor de las áreas máximas se obtiene para un ángulo de inclinación de 45°?

b) El análisis que han hecho para responder los cuestionamientos formulados en el inciso anterior, se espera les haya permitido concluir que la manera en que varía el área de la sección transversal del agua con respecto a la altura depende de la posición en que se coloque el recipiente; analicen ahora y comenten en qué medida las conclusiones a las que llegaron, respecto a la variación estudiada, dependen de:
   - Las dimensiones del recipiente

   - De la forma del recipiente

c) Con base en las reflexiones hechas y las conclusiones a que hayan llegado a través del proceso de estudio que se ha llevado a cabo, sobre la variación del área de la sección transversal del agua con respecto a la altura, cada uno de ustedes deberá escribir, como tarea, un ensayo de no menos de dos cuartillas en el que expresen dichas reflexiones y conclusiones.

Situación 4.

Analicen y comenten, ahora, de la misma forma que lo hicieron en los tres problemas anteriores, primero la variación del volumen del agua con respecto a la altura y luego la variación de la rapidez con que varía el volumen con respecto a la altura.

Situación 5.

Reflexionen, analicen y comenten sobre qué otras variaciones pueden ser estudiadas en el caso del llenado de recipientes y enumeren todas las que perciban.

Situación 6.

Trabajando ahora a nivel grupal, como se hizo en el caso del área, bajo la conducción del instructor se desarrollará, a nivel de todo el grupo, la presentación de las reflexiones y conclusiones hechas en los equipos sobre la variación del volumen y de su rapidez con respecto a la altura.

También en esta ocasión y con base en las reflexiones hechas y las conclusiones a que hayan llegado a través del proceso de estudio que se ha llevado a cabo, sobre la variación del volumen del agua con respecto a la altura, cada uno de ustedes deberá escribir, como tarea, un ensayo de no menos de dos cuartillas en el que expresen dichas reflexiones y conclusiones.

Actividad 3. El problema de la representación analítica de la variación

3.1 Reflexiones

El problema que se propone en esta actividad deberá, al igual que se hizo con los problemas de las actividades anteriores, primero reflexionarse de manera personal independiente, luego discutirse en el equipo y finalmente debatirse a nivel de todo el grupo.

Situación 1

El estudio que hasta este momento se ha hecho de la variación en el llenado de recipientes, se espera que les haya permitido percibir las variables, establecer algunas relaciones de dependencia entre ellas, describir y representar gráficamente la variación del área de la sección transversal y del volumen, en ambos casos con respecto a la altura. Ahora el reto es tratar de representar analíticamente estas variaciones, es decir, la del área con respecto a la altura y la del volumen, también con respecto a la altura.

Actividad 4. El lenguaje natural y la descripción de la variación

4.1 Describiendo el movimiento a partir de la descripción en lenguaje natural

En cada una de las siguientes historias se describe una variación. Represente, en cada caso, dicha variación con una gráfica, trabajando individualmente.

a) Salí de casa rumbo a la escuela y apenas había caminado un poco, me di cuenta que había olvidado mi celular. Regresé, lo recogí y salí de nuevo. No tuve problema para llegar a tiempo. Grafique la distancia a que se encuentra de la casa con respecto al tiempo.

b) Salí de casa sin mucha prisa y casi al llegar a la escuela me di cuenta que había olvidado mi celular. Regresé corriendo, lo recogí y caminé de nuevo rumbo a la escuela y, a pesar de que me había cansado con la corrida, tuve que hacerlo bastante rápido para no llegar tarde a la clase de Cálculo. Grafique la distancia a que se encuentra de la casa con respecto al tiempo.

c) La verdad es que empecé con muy buen ritmo la carrera, pero temí cansarme antes de tiempo, por eso fui disminuyendo la velocidad. Lo malo, tal vez, es que prolongué demasiado tiempo esto, así que, a pesar de haber metido el acelerador bruscamente y haber mantenido la velocidad durante los últimos diez minutos, ya no fue posible alcanzar al que ganó. Grafique la distancia recorrida con respecto al tiempo.

d) Hoy me levanté temprano, eran como las 5 A. M., el aire estaba bastante fresco, se sentía frío; sin embargo, más o menos a partir de las 6, cuando salió el sol, empezó a subir la temperatura y aunque al principio lo hizo lentamente, como a las 12 se sentía bastante calor e iba para largo. Por fortuna como a las 3 P. M. se nubló y ya no se sintió tan caluroso, sobre todo cuando empezó a llover, que serían casi las 5, pues en poco tiempo hasta volvió a sentirse frío. Si sigue así, esta noche la temperatura estará muy baja. Grafique la temperatura con respecto al tiempo.

e) Cuando el precio de una mercancía es igual al costo de producción, la ganancia es nula y a partir de ahí, si se aumenta el precio, aumentará la ganancia, aunque mientras más aumente el precio, el aumento de la ganancia será cada vez menor pues disminuirá la cantidad de mercancía demandada; al grado de que deberá haber un valor a partir del cual, si se aumenta el precio, la ganancia disminuya debido a la disminución de la demanda. Grafique la ganancia con respecto al precio

f) Durante los primeros diez días del mes de mayo no cayó una sola gota de agua, pero del once al quince estuvo lloviendo diario, aunque más bien parecía llovizna; luego volvió a estar sin lluvia hasta el veintidós; pero en el aguacero del día veintitrés cayó más agua que la que se había acumulado en los cinco días en que estuvo lloviendo y aunque también llovió el veinticuatro y el veinticinco, cada día llovía menos. Total ocho días con lluvia y veintidós con sol, permiten decir que éste fue un buen mes para esta región. Grafique la cantidad de agua de lluvia acumulada durante el mes con respecto al tiempo, medido en días.

g) Dos automóviles (A_1 y A_2) empiezan a moverse al mismo tiempo por una carretera, los dos se mueven con velocidad constante, la velocidad de A_2 es mayor que la velocidad de A_1, a las dos horas A_2 alcanza y rebasa a A_1, los dos autos se mueven durante tres horas. Grafique en un mismo sistema de coordenadas la posición de los automóviles con respecto al tiempo.

h) Un móvil se desplaza por una línea recta con una velocidad de 2 m/seg, a partir de un determinado momento se le aplica, durante 3 seg, una fuerza constante en la misma dirección y en el mismo sentido del movimiento, de tal manera que su velocidad al final de los tres segundos, es de 11 m/seg. Con esta información bosqueje las gráficas de:

- La velocidad con respecto al tiempo, en ese intervalo de 3 seg.
- La distancia recorrida con respecto al tiempo, en el mismo intervalo.

4.2 Tercera institucionalización local

Bajo la conducción del instructor, hacer una reflexión grupal sobre los problemas o situaciones presentadas en la sección sobre el llenado de recipientes. Analizar las ventajas que ofrece un tipo u otro de representar la variación (en forma gráfica, analítica, numérica o verbal).

Actividad 5. El estudio de la variación

5.1 Las matemáticas del cambio

En equipos de tres personas, lean, analicen y comenten el siguiente escrito. Al hacerlo, hagan anotaciones con sus comentarios, sus observaciones y sus cuestionamientos.

Las Matemáticas del Cambio

Algunas reflexiones sobre su enseñanza y su aprendizaje

Lograr que los estudiantes sean eficaces para plantear y resolver las ecuaciones diferenciales que modelan los sistemas cambiantes es la meta más ambiciosa del enfoque tradicional de la enseñanza de las matemáticas, especialmente en las carreras de ingeniería. El planteamiento y resolución de dichas ecuaciones es el elemento básico en la planeación y diseño de la actividad de enseñanza de las matemáticas tradicionales enfocadas a la ingeniería.

Sin embargo, en los últimos años, según hemos visto, el uso de las nuevas tecnologías en el análisis y resolución de situaciones y problemas relativos al cambio ha originado el surgimiento de un nuevo estilo de las matemáticas y ha ocasionado el enriquecimiento y diversificación de su concepción, en particular de la ***matemática del cambio***.
Una consecuencia de esta nueva concepción es la necesidad de reformular planes y programas de estudio de la disciplina que dejen atrás el enfoque tradicional que va de la aritmética al álgebra y de ahí al Cálculo Diferencial e Integral; planes y programas que tomen en cuenta que:

a) Para estudiar el cambio, el científico del futuro necesitará combinar, en una sola visión integrada del mundo, aspectos de las matemáticas tradicionales, de las matemáticas modernas, de la experimentación y de la computación.
b) Necesitaremos científicos que igual tomen un lápiz que una terminal de computadora, que igual puedan hacer bosquejos toscos pero informativos, que gráficas de computadora; que igual piensen en términos de imágenes, que en función de números o fórmulas.
c) No sólo los matemáticos y científicos, sino las personas en todos los ámbitos de la vida: administradores, políticos, líderes empresariales y cualquier otra persona que requiera tomar

decisiones, deben enfrentar un mundo cambiante. Deben apreciar cómo son los cambios sutiles, deben desaprender supuestos obsoletos. El cambio nos afecta a todos. La amplitud de los puntos de vista y el ámbito de las habilidades requeridas por las matemáticas actuales serán importantes también para ellos.

d) Nuevos problemas y nuevos descubrimientos requieren de un ámbito mucho más variado del aparato mental.
e) Los patrones del cambio en la naturaleza y en las matemáticas no se constriñen a las categorías ordinarias del pensamiento.
f) Para hacer progresos debemos responder con imaginación y sensibilidad a los nuevos tipos de patrones.
g) Nuestros propios patrones de pensamiento deben cambiar.
h) También el desarrollo más reciente de las matemáticas, se da en estrecha conjunción con sus aplicaciones en las ciencias físicas, biológicas, conductuales y sociales.
i) Gran parte de los avances más recientes de las matemáticas son inspirados por experimentos de computadora y de laboratorio o por las formas de los fenómenos naturales.
j) Recíprocamente, las ideas matemáticas desarrolladas *per se*, o en un área de aplicación diferente, se están transfiriendo a otras tareas donde encuentran aplicaciones prácticas.
k) Hoy en día existen muy pocas ramas de las matemáticas que no guarden alguna relación con el cambio y que esto se debe no sólo a que las matemáticas son una estructura altamente integrada e interconectada; sino al hecho de que el cambio es un fenómeno a tal punto complejo y variado que para abordarlo requerimos de todas las ideas que podamos reunir.
l) Esta variedad constituye un rasgo fundamental del nuevo estilo de las matemáticas, y que, en consecuencia, deberá estimularse en todos los niveles.
m) Las computadoras (en particular las gráficas de computadora) permiten que personas no especializadas, desde niños de escuela hasta gerentes, desde profesores de la escuela elemental hasta científicos, sean testigos de la belleza y la complejidad de las matemáticas y las apliquen en la práctica.

Estos señalamientos sobre algunos de los elementos que es necesario considerar en la reformulación de planes y programas de estudio de la matemática del cambio en los diversos grados escolares, se hacen sin perder de vista que:

a) En la formación de matemáticos profesionales continuará requiriéndose necesariamente el pensamiento lógico preciso y la comprensión precisa del significado de “demostración”.

b) El uso de computadoras es como “herramientas experimentales” y que los experimentos por sí solos no pueden llevar a la comprensión de *por qué* ocurren los fenómenos observados, que su papel es ofrecer un grado de confianza de que ciertos fenómenos en realidad ocurren.
c) La actitud fácil de “Mételo en la computadora y ella te responderá todas las preguntas” es ingenua y que tiende a desaparecer a medida que se adquiere experiencia en su uso.

Otros elementos que es necesario considerar, en dicha reformulación, son los avances logrados en la comprensión de los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las Matemáticas, que son resultado de recientes investigaciones en el campo de la Matemática Educativa (Didáctica de las Matemáticas). Por ejemplo, al diseñar actividades para la enseñanza de las matemáticas del cambio es necesario tener presente, por una parte, los resultados que nos hacen ver las condiciones en que llegan los niños a la escuela para iniciar el estudio de la variación y, por otra, los resultados que nos muestran las dificultades (obstáculos) que es necesario superar con dicho estudio. Respecto a la primera cuestión es necesario tener presente que:

a) Los niños llegan a la escuela habiendo tenido, desde muy temprana edad, un gran número de experiencias relativas a la variación: desde pequeños mueven y ven moverse objetos y, más aún, se mueve ellos mismos lo cual les permite observar y experimentar el cambio de la posición de un objeto en movimiento; también tienen experiencias con el cambio de tamaño, lo que les permite observar y experimentar la variación de la longitud, del área o del volumen de los cuerpos; con el enfriamiento y calentamiento de sustancias, es decir de variación de temperatura o con el cambio de la intensidad del sonido, etc.)
b) De experiencias de este tipo provienen las significaciones de los términos como *‘crecer’, ‘aumentar’, ‘decrecer’, ‘disminuir’, ‘rápido’, ‘lento’*, entre otros.
c) Esas mismas experiencias generan significaciones relativas a la *rapidez de la variación*, que se ponen de manifiesto en el uso correcto de expresiones tales como *‘creció muy rápido’, ‘disminuyó lentamente’, ‘fue aumentando cada vez más rápidamente’*, etc.
d) En las experiencias aludidas también se generan significaciones relativas a la dependencia entre variables. Esto queda de manifiesto en el sentido que tienen expresiones tales *como: ‘espera un poco’, ‘ya va a estar’, ‘cómo tarda’*, que muestran que

se tiene conciencia de que la variación que se está observando depende del tiempo; o en el que tienen expresiones como: *'acércate para que oigas mejor'*, o *'acércate para que veas mejor'* que muestra que se tiene conciencia de que hay algo que varía con la distancia.

e) Incluso, desde temprana edad se toman decisiones con base en el análisis de la forma en que una cierta cantidad está variando. Ejemplos de esto son: la decisión que toma una persona de cruzar o no una calle, al ver venir un vehículo; pues dicha decisión implica evaluar ("a ojo") la manera en que el vehículo está variando su posición y la forma en que ella (la persona) puede variarla; para luego estimar si dispone de tiempo suficiente para cruzar. (Generalmente estas estimaciones resultan acertadas). También la decisión que toma un jugador de básquetbol respecto a la velocidad inicial y al ángulo de inclinación con que debe lanzar la pelota que quiere encestar, se basa en el conocimiento empírico que tiene del patrón de variación de la posición de la pelota en función de estos parámetros.

f) En realidad hay una gran cantidad de situaciones en las que la decisión que tomamos, de hacer o no hacer alguna cosa, es resultado de analizar la forma en que una cierta cantidad varía con respecto a otra o a otras. Tal y análisis lo hacemos utilizando patrones empíricos de variación.

Estos elementos muestran que los niños al iniciar, en la escuela, el estudio de la variación, disponen ya de un sistema de conceptos relacionados con ella que son resultado de experiencias previas tenidas en su entorno familiar. Este hecho tiene al menos dos implicaciones en la planeación de la enseñanza: por una parte, indica que el estudio de la variación puede iniciarse prácticamente desde los primeros grados de la escuela primaria y, por otra, que es necesario considerar que los niños no parten de cero al iniciar dicho estudio.

Respecto a los obstáculos a vencer es necesario tener presente que el sistema de conceptos que sobre la variación forman los niños, aún después de sus primeros años de escuela, es un sistema que les permite percibir los cambios en el objeto o la situación de manera global, sin alcanzar a precisar las propiedades o magnitudes que han cambiado. Un ejemplo de esto es el hecho de que al ver caer una pelota desde una cierta altura, aún los niños cuya edad está entre los once y doce años (que cursan el sexto grado de la escuela primaria), afirman que lo que está cambiando es la pelota y lo explican diciendo que porque primero está arriba y después abajo; de lo cual se sigue que están haciendo referencia a la posición (altura) de la pelota, pero que no son capaces de percibir la posición como el 'objeto' a observar. Esto implica que dicho sistema de conceptos es un sistema rudimentario en el que las representaciones simbólicas (gráficas, tablas de datos numéricos y expresiones analíticas) de la variación están ausentes.

Llegar a formar un sistema de conceptos en el que el individuo no sólo percibe e interpreta la variación a través de las diversas formas de representación, sino que además conoce las posibilidades y limitaciones de las mismas y las utiliza de manera simultánea, con propiedad y creatividad, para analizar, interpretar y resolver problemas, es una aspiración. Lograrlo implica ir superando diversos obstáculos que van desde los relacionados con la identificación de las variables y el establecimiento de las relaciones de dependencia, hasta el desarrollo de un nuevo tipo de pensamiento, denominado ***pensamiento variacional*** que le permite interpretar apropiadamente y con creatividad una diversidad de problemas de matemáticas y de otras disciplinas, en términos de problemas sobre variación.

Además de todo lo anterior, también es necesario tener presente que llegar a entender y controlar los procesos de cambio, requiere que seamos sensibles a los patrones de cambio, lo que a su vez requiere:

a) Aprender a representar la variación en forma comprensible
b) Entender los tipos básicos de variación
c) Identificar tipos particulares de variación cuando ocurran
d) Desarrollar técnicas para analizar e interpretar la variación en los diferentes modelos
e) Aprender a utilizar las técnicas de análisis de la variación en los modelos, para analizar la variación de las situaciones del mundo real

Las actividades que se presentan a continuación tienen como propósito fundamental ilustrar la forma en que pueden diseñarse problemas teniendo presentes las reflexiones expuestas, a la vez que el enfoque basado en competencias establecido en los nuevos programas de estudio derivados de la RIEMS.

5.2 Cuarta institucionalización local

Con base en el análisis y comentarios hechos en los equipos, relacionados con el artículo propuesto, bajo la conducción del instructor, analicen y comenten en el grupo el contenido del artículo. Bajo esta perspectiva, haga un análisis crítico de las actividades de llenado de recipientes. El producto de tal análisis, debe ser un escrito de no menos de una cuartilla en la que expresen sus reflexiones personales relacionadas con el tema tratado en el escrito.

SECCIÓN 3

Creando actividades

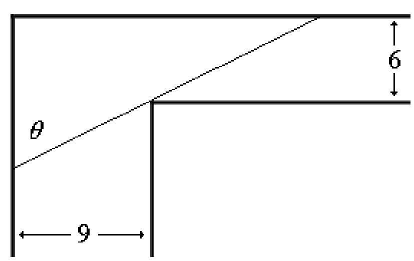
Actividad 1. Un problema de optimización

1.1 Manipulando un archivo ya construido.

Con la finalidad de promover el estudio de objetos matemáticos a través de la resolución de problemas, presentamos la creación de una actividad, apoyándonos con el software GeoGebra, a partir de un problema de optimización de los muchos que se proponen en los textos tradicionales, en el capítulo de "aplicaciones de la derivada".

Para este fin, tomamos el problema número 46 de la página 301 del libro titulado CÁLCULO TRASCENDENTES TEMPRANAS. James Stewart. Tercera edición, editorial Thomson.

> *Un tubo de acero va a pasar por un corredor de 9 pies de ancho. Al final del pasillo hay una vuelta en ángulo recto y el nuevo corredor tiene 6 pies de ancho. ¿Qué longitud máxima debe tener el tubo para poder hacerlo pasar, horizontalmente, por esa vuelta?*



Una de las muchas dificultades que enfrentan los estudiantes ante este tipo de problemas, es la construcción del modelo matemático inmerso en tal situación problema, esto se debe, en parte, a la identificación de las variables que interviene y su posible relación entre ellas.

En la primera etapa de esta actividad, creada con GeoGebra, se les propone que de manera individual, pasen cinco tubos de diferente longitud, por ese pasillo. Para ello abra el archivo ProbTubo.ggb o siga el hipervínculo ProbTubo, véase también la dirección electrónica http://www.mat.uson.mx/jmbravo, y en su pantalla aparecerá una imagen como la que se muestra en la Figura 3.

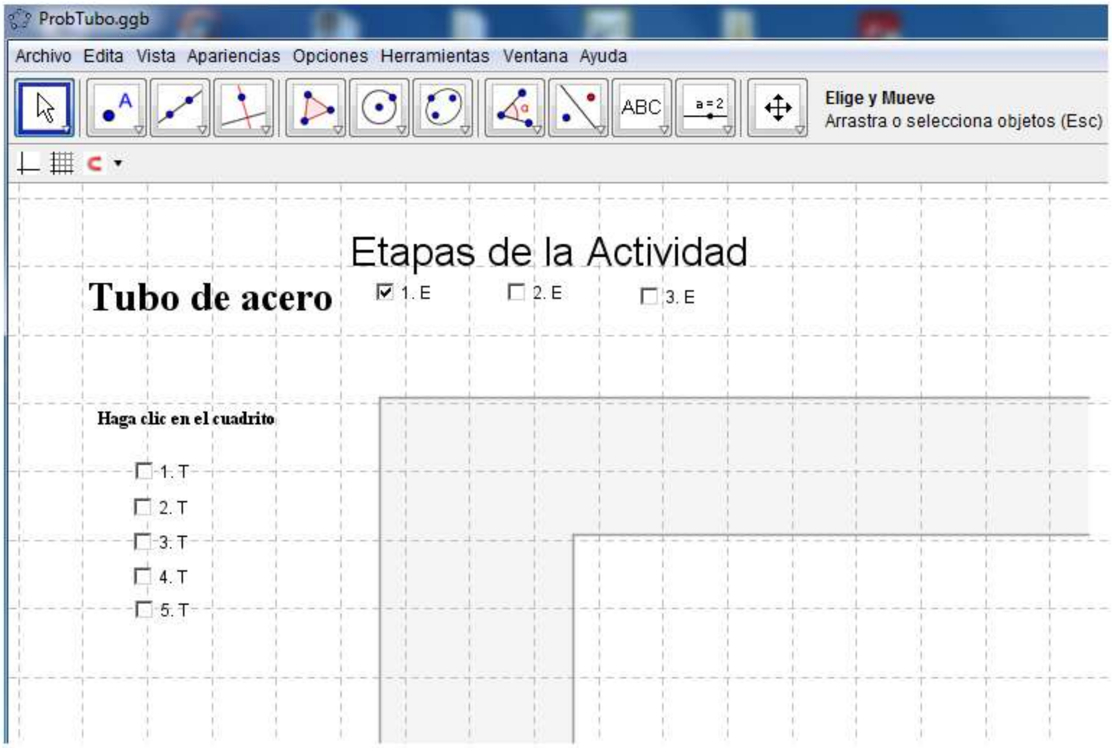


Figura 3. Problema de Optimización

Nota. El propósito de esta actividad es descubrir las características y las condiciones o restricciones para lograr pasar por la vuelta el tubo de máxima longitud, de manera que cada vez que el tubo salga del pasillo aparecerá un mensaje y usted tendrá que regresar el tubo a la posición inmediata anterior.

Una vez pasados los cinco tubos, enumere y argumente las características y las condiciones con las que se logra pasar el tubo.

El propósito de la segunda etapa (2. E) es la de estimar la longitud máxima del tubo que logra pasar por la vuelta al mismo tiempo que confirma y descubre nuevas características, condiciones y/o restricciones para lograrlo.

Describa y enumera dichas características y condiciones, argumente.

Por último, en la tercera etapa se plantea una posible relación entre las posibles variables que Usted identificó y su representación gráficas, lugar geométrico. Obtenga la expresión analítica del modelo matemático.

1.2 Resolviendo el problema de optimización.

Trabajando en equipo determinen cuál es la máxima longitud que puede tener un tubo para pasar por el pasillo.

Actividad 2. Creando actividades de enseñanza

2.1 Problemas típicos de los textos de cálculo

A continuación se presentan seis problemas típicos que aparecen en los libros de texto comercialmente más conocidos. Cada equipo deberá seleccionar uno de ellos y realizar una actividad de enseñanza para la clase de cálculo, empleando el software GeoGebra o cualquier otro que resulte de su preferencia.

Situación 1

Un trozo de cable de 20 cm de largo se corta en dos partes y cada una se dobla en forma de un cuadrado. ¿Cómo debe de cortarse el cable de manera el área de los dos cuadrados sea lo más pequeña posible? Problema 24, página 183. Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales. Louis Leithold. 1988, Editorial Harla.

Situación 2

La sección transversal de un túnel es un rectángulo *h* rematado en un arco semicircular de radio *r* (véase la figura 5.70). Si el área transversal es A, determine las dimensiones de la figura que minimiza el perímetro. Problema 10, página 314. CÁLCULO. Deborah Hughes-Hallett y Andrew M. Gleason. Segunda Edición, Editorial CECSA.

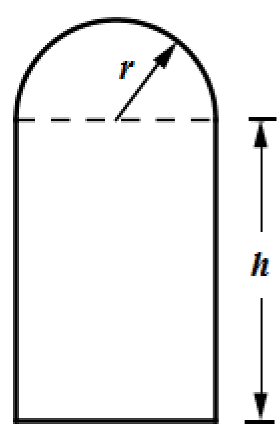


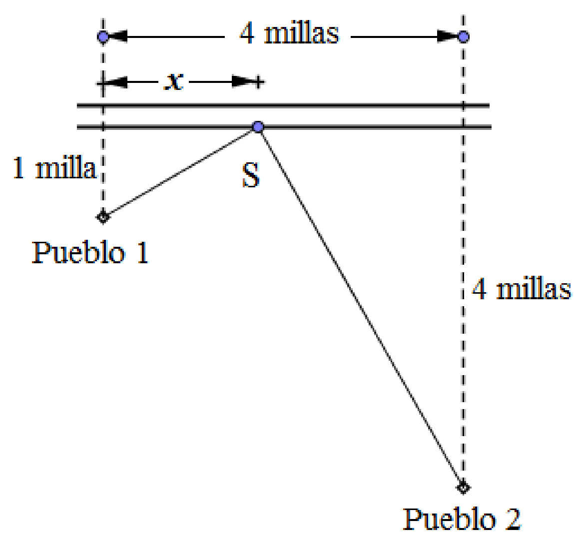
Figura 5.70

Situación 3

Halle las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro inscrito en una circunferencia de radio *a*. Problema 12, página 216. Cálculo y Geometría Analítica. Sherman K. Stein y Anthony Barcellos. Quinta Edición, Mc Graw Hill.

Situación 4

En la misma orilla de un río recto hay dos pueblos, los habitantes desean construir una estación de bombeo, S, que les abastezca agua. La estación de bombeo debe de estar en la margen del río y los tubos deben ir directo a los pueblos. Las distancias se ven en la 5.71. ¿Dónde debe estar la estación de bombeo para minimizar la longitud total del tubo? Página 314, ejercicio 18. CÁLCULO. Deborah Hughes-Hallett y Andrew M. Gleason. Segunda Edición, Editorial CECSA.



Situación 5

Demuestra que entre todos los triángulos isósceles con determinado perímetro, el que tiene mayor área es el equilátero. Página 301, ejercicio 41. CÁLCULO TRASCENDENTES TEMPRANAS. James Stewart. Tercera edición, Editorial Thomson.

Situación 6

La compañía Montañismo y Aventura, S. A. desea fabricar tiendas de campaña utilizando una lona cuadrada de 6 metros de lado. El diseñador de la compañía ha diseñado el modelo Piramidal I trazando un cuadrado interior concéntrico (su centro es el mismo del cuadrado mayor). A partir de cada lado del cuadrado interior se trazan triángulos cuyos vértices se encuentran a la mitad de los lados de la lona y se cortan las partes de las esquinas como se muestra en la figura 7, de manera que las cuatro partes triangulares se pueden doblar y formar una tienda con la forma de una pirámide de base cuadrada. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de la tienda con mayor capacidad? Pág. 476, ejercicio 8. CÁLCULO DIFERENCIAL para ingeniería. Prado, Santiago, Gómez, Quezada, Zuñiga, Pulido, Barajas, González, Aguilar. Primera edición, editorial PEARSON, Prentice Hall.

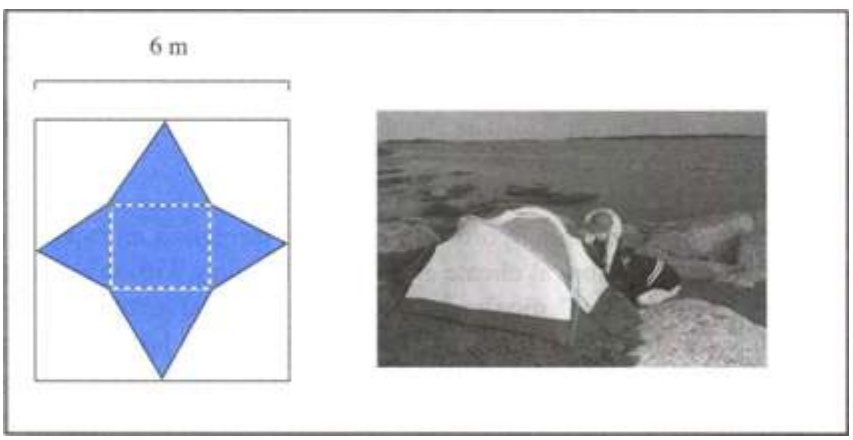


Figura 7. Manufactura de las tiendas del tipo Piramidal I

SECCIÓN 4

Cierre del módulo. Institucionalización global

Al igual que lo hicimos en el módulo 2, es necesario que hagamos una reflexión global sobre los aspectos relativos a nuestra actividad docente, enmarcada dentro de los requerimientos establecidos en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Siguiendo la estrategia a seguir por parte del instructor del módulo, analicen individualmente para después discutir en equipo y en grupo los siguientes puntos.

a) ¿Qué diferencias percibe entre el tipo de actividades presentadas en el Módulo 2 y el Módulo 3?
b) Las actividades presentadas en este Módulo ¿permiten promover las competencias de los estudiantes? ¿cuáles?
c) ¿Cuáles son las competencias docentes que se requieren para impulsar estas actividades y diseñar otras que respondan a los lineamientos curriculares del bachillerato?

SECCIÓN 5

Cierre del diplomado

En sesión grupal y bajo la conducción del instructor, se analizará las posibilidades de modificar las prácticas docentes de cada profesor, determinando de manera precisa los aspectos en los cuales el diplomado proporcionó elementos para ello y ubicando las limitaciones, dificultades y obstáculos que existen para hacer efectivas las modificaciones de dicha práctica docente.

Como se indica en la presentación del diplomado, adicional a las tareas que se fueron especificando en cada módulo, el participante deberá entregar un ensayo con estas reflexiones, en un escrito no mayor de cinco cuartillas.

Evaluación y acreditación del Módulo 3

Para la acreditación de este módulo se requiere la entrega individual de las siguientes actividades:

a) El ensayo indicado en la Actividad 1.4 de la Sección 1 (página 7);

b) El ensayo descrito al final de la página 23;

c) El ensayo establecido en la página 33.

Enviar por correo electrónico a las direcciones electrónicas siguientes:

jmbravo@gauss.mat.uson.mx

guty@gauss.mat.uson.mx

ravilag@gauss.mat.uson.mx

Fecha límite: 15 de enero de 2013.

d) La entrega individual del ensayo estipulado en la Sección 5, Cierre del Módulo.

Fecha límite: Enero 21 de 2013.

Enviar su archivo a cada una de las siguientes direcciones electrónicas:

sibarra@gauss.mat.uson.mx

jmbravo@gauss.mat.uson.mx

guty@gauss.mat.uson.mx

ravilag@gauss.mat.uson.mx

Referencias Bibliográficas

Stewart, Ian. Cambio. (Artículo que forma parte del libro “La enseñanza agradable de las matemáticas” de la Colección “Textos Politécnicos” de la Editorial Limusa)

Stewart, James. CÁLCULO TRASCENDENTES TEMPRANAS. Tercera edición, Editorial Thomson.

Leithold, Louis. (1988). CÁLCULO para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales. Editorial Harla.

Hughes-Hallett, Deborah y Gleason, Andrew M. CÁLCULO. Segunda Edición, Editorial CECSA.

Stein, Sherman K. y Barcellos Anthony. Cálculo y Geometría Analítica. Quinta Edición, Mc Graw Hill.

Prado, Santiago, Gómez, Quezada, Zúñiga, Pulido, Barajas, González, Aguilar. CÁLCULO DIFERENCIAL para ingeniería. Primera edición, Editorial PEARSON.