ERROR

GUIÓN PARA EL TEMA

CONCEPTOS BÁSICOS

REPASO de conceptos de dígito *significativo* y de *orden*, para números en notación decimal.

Para señalar la diferencia entre el concepto de *dígito significativo* en análisis numérico y en cómo se considera en física y otras disciplinas fácticas comentamos sobre las respuestas a los ejemplos siguientes.

EJEMPLO.- Un distribuidor de especies tiene un saco de 100 kg. de pimienta negra que desea embolsar en bolsitas de 30 g, ¿cuántas bolsitas obtiene del saco?
Respuesta numérica: 3 333.333 333 - con 10 dígitos significativos;
Respuesta con "significado" en el contexto factual: 3 333 bolsitas.

EJEMPLO.- deseamos repartir 100 dólares entre 3 personas, ¿cuánto le toca a cada una?
Respuesta numérica: 33.333 333 33 - con 10 dígitos significativos;
Respuesta con "significado" en el contexto factual: 33.33 dólares.

EJEMPLO.- deseamos repartir 100 pesos mexicanos entre 3 personas, ¿cuánto le toca a cada una?
Respuesta numérica: 33.333 333 33 - con 10 dígitos significativos;
Respuesta con "significado" en el contexto factual: 33.3 pesos o 33 pesos.

DEFINICIÓN.- En el sistema decimal un *dígito significativo* de un número dado es:

a) Cualquier dígito distinto del 0 en su representación decimal;
b) O cualquier 0 situado entre dígitos significativos;
c) O cualquier 0 usado para indicar un lugar posicional, (ceros "a la derecha").

Todos los ceros restantes del número que sirven solamente para fijar la posición del punto decimal (ceros "a la izquierda") no son dígitos significativos.

EJEMPLO.- Dar el orden de los siguientes números:
a) 64 489.032 b) 0.000 026 509 8 c) 4.089 156 34

DEFINICIÓN.- Un número z, en notación decimal, es del *orden de magnitud* 10^m si su primer dígito significativo, d_1, está en la posición de 10^m; es decir, si

$$z = d_1 \times 10^m + d_2 \times 10^{m-1} + d_3 \times 10^{m-2} + \ldots\ldots, \text{ con } d_1 \neq 0$$

ERRORES

EJEMPLO INTRODUCTORIO.- ¿Cuántos litros de gasolina habrá en un depósito de una planta de PEMEX si las dimensiones del depósito (cilindro circular recto) son: altura 14 m., radio de base 20 m.?

Hacer el ejemplo con las distintas aproximaciones de π dadas abajo; remarcando la razón física de tener que usar una cantidad finita de dígitos significativos y no la infinidad de la expansión decimal de π, y por ende, usamos aproximaciones y no el valor exacto.

a) con $\pi = 3.14$;
b) con $\pi = 3.1416$;
c) con π interno de la calculadora CASIO *fx*- 9700 GE – con 14 dígitos significativos -.

¿Cuál de los volúmenes calculados es mejor?

Después de oír las respuestas calcular el volumen
d) con $\pi = 3.141\,592\,653\,58$

EJEMPLO.- ¿Cuánto mide de largo el pizarrón?

a) medido con regla graduada hasta decímetros;
b) medido con regla graduada hasta centímetros;
e) medido con regla graduada hasta milímetros

EJEMPLO.- De las aproximaciones de π (= 3.141592653...) dadas abajo, ¿cuál es mejor aproximación?

1) $\pi^*_1 = 3.1414$
2) $\pi^*_2 = 3.1415$
3) $\pi^*_3 = 3.1416$
4) $\pi^*_4 = 3.1417$
5) $\pi^*_5 = 3.1418$

Trabajar geométricamente el ejemplo para motivar que “la mejor” es la que está “más cerca” de π. Para remarcar que no depende de la cantidad de dígitos significativos con la que se escribe el número aproximado dar la aproximación

6) 3.141 500 000 21

y ésta al graficarla en la recta numérica está más lejos de π que 3.141 6 por lo que no es mejor aproximación.

EJEMPLO.- De las aproximaciones de x = 239.78563791 dadas abajo, ¿cuál es mejor aproximación?

$$x^*_1 = 239.78$$
$$x^*_2 = 239.78563$$
$$x^*_3 = 239.78564$$
$$x^*_4 = 239.78565$$
$$x^*_5 = 239.78562$$

NOTACIÓN: de número exacto y número aproximado

x número exacto
x^* número aproximado

para decir que x^* aproxima a x:

$$x \cong x^*$$

DEFINICIÓN.- Un *número aproximado* x^* es un número tal que difiere ligeramente del número exacto x y se utiliza en los cálculos en lugar de este último.

Si $x^* < x$, es decir, el aproximado es menor que el exacto, decimos que aproxima al exacto *por defecto*; y si $x^* > x$, el aproximado es mayor que el exacto, decimos que lo aproxima *por exceso*.

EJEMPLO.- Dado el número exacto x = 76.074 632 09, dar una aproximación de él que tenga solamente 5 dígitos significativos y

a) que lo aproxime por *defecto*;
b) que lo aproxime por *exceso*.

DEFINICIÓN.- El *error*, E, en un número aproximado x^* es

$$E = x - x^*$$

En algunos libros se define, $E = x^* - x$

DEFINICIÓN.- El *error absoluto*, $|E|$, en un número aproximado x^* es

$$|E| = | x - x^* |$$

EJEMPLO.- Calcular el error y el error absoluto en las aproximaciones dadas en el ejemplo inmediato anterior.

EJEMPLO.- Sea $x^* = 2.089\ 544\ 123$ con un error $E = -\ 0.000\ 752$. ¿A qué número exacto, x, aproxima?

EJEMPLO.- Sea x = 45.980 275 015, dar una aproximación de él, x*, que lo aproxime con un error absoluto | E | = 0.000 064

EJEMPLO.- ¿Cuál es el error de $\pi^* = 3.14$ cuando es una aproximación de π ?

EJEMPLO.- ¿Cuál es el error de $\pi^* = 3.141\ 6$ cuando es una aproximación de π ?

DEFINICIÓN.- Una *cota del error absoluto, k,* de un número aproximado x^* es cualquier número no negativo mayor o igual que el error absoluto de dicho número; es decir,

$$k \geq 0 \text{ tal que } |E| \leq k$$

En términos de la definición del error, $|x - x^*| \leq k$.

La cota también es llamada: error máximo, límite del error, tolerancia del error o margen de error.

EJEMPLO.- Sabemos que un número exacto, x, y su aproximación, x^*, están ambos en el intervalo [12.34567902, 12.34578004], ¿cuál es una, k, cota para el error absoluto de la aproximación x^*?

EJEMPLO.- ¿Cuál es una cota, k, con 2 dígitos significativos, para el error absoluto de $\pi^* = 3.1416$?

EJEMPLO.- Sabemos que $\sqrt{17} = 4.1231056...$ Si tomamos como aproximación de $\sqrt{17}$ el número 4.12, es decir, $\sqrt{17} \cong 4.12$, ¿cuál es el error máximo, k, en esta aproximación?

EJEMPLO.- Si medimos la longitud, L, de un pizarrón con una regla graduada hasta centímetros y determinamos que mide 2.72 m., ¿cuál es una, k, cota para el error absoluto de esta aproximación?

EJEMPLO.- Sea $x^* = 563.0459876$ con cota de su error absoluto, $k = 3.08 \times 10^{-4}$. ¿Que información podemos obtener sobre el número exacto, x?

En general, si conocemos el número aproximado x^* y una cota, k, de su error absoluto, el número exacto x está en el intervalo que es la vecindad de x^* de radio k; es decir,

$$x \in [\, x^* - k,\ x^* + k \,]$$

EJERCICIO.- Sea $x^* = 0.045682138$, y $k = 0.5 \times 10^{-5}$ una cota de su error absoluto. Dar un intervalo donde se encuentre el número exacto x. ¿Cuántos de los primeros dígitos significativos se conocen?

EJEMPLO.- Redondee simétricamente los siguientes números x's hasta el orden pedido

número x	redondee hasta
45089.426789	unidades
56.0363986	centésimas
876.344097	décimas
0.0005661284	10^{-6}

EJEMPLO.- Para los números redondeados (aproximación del correspondiente x) del ejemplo anterior obtenga una cota k de su error absoluto

redondeado x^*	cota, k
45089	
56.04	
876.3	
0.000566	

DEFINICIÓN.- Sea x^* un número aproximado (de un exacto x) de orden 10^m, decimos que sus *primeros t* dígitos significativos son *correctos o exactos*, si el error absoluto del número está acotado por $k = 0.5 \times 10^{m-t+1}$; es decir, si

$$|E| \leq 0.5 \times 10^{m-t+1},$$

donde m es la potencia de la posición decimal del primer dígito significativo de x^*.

En otras palabras, si el error absoluto del número x^* no excede de media unidad en la posición decimal t-ésima, contando de izquierda a derecha, decimos que sus primeros t dígitos significativos son *correctos o exactos*.

EJEMPLO.- Redondeando simétricamente π = 3.141 592 653... hasta el orden 10^{-4} se obtiene la aproximación $\pi^* = 3.1416$. Mostrar que en esta aproximación todos sus 5 dígitos significativos son correctos.

¿Cómo saber cuántos dígitos significativos *correctos* tiene un determinado número aproximado?

Conociendo el número aproximado x^* y una cota k de su error absoluto, podemos determinar *cuáles* de sus primeros dígitos significativos son *correctos* con el procedimiento seguido en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS.-

a) Sea $x^* = 0.045682138$, y $k = 0.5 \times 10^{-5}$ una cota de su error absoluto. ¿Cuántos dígitos significativos *correctos* tiene y cuáles son?

b) Sea $x^* = 345.07892374$ con una cota $k = 0.5 \times 10^{-6}$. ¿Cuántos dígitos significativos *correctos* tiene y cuáles son?

c) Sea $x^* = 280.69103502175$ con una cota $k = 0.0004084$. ¿Cuántos dígitos significativos *correctos* tiene y cuáles son?

d) Sea $x^* = 0.00069103502175$ con una cota $k = 7.4325 \times 10^{-8}$. ¿Cuántos dígitos significativos *correctos* tiene y cuáles son?

e) Sea $\sqrt{17} \cong 4.12$, si 4.12 tiene en este caso la cota $k = 0.003106$ ¿Cuántos dígitos significativos *correctos* tiene 4.12 y cuáles son?

Otros tipos de situación están ejemplificados a continuación,

EJEMPLOS.-

a) Determinar cuántos dígitos correctos tiene $x^* = 3.6055$ como una aproximación de $\sqrt{13} = 3.6055512...$, y cuántos de sus dígitos significativos correctos son exactamente iguales a los correspondientes dígitos significativos de $\sqrt{13}$.

b) Determinar cuántos dígitos correctos tiene $\pi^* = 3.1415$, y cuántos de sus dígitos correctos son exactamente iguales a los correspondientes dígitos de π.

EJERCICIO.- Determinar cuántos dígitos correctos tiene $\pi^* = 3.1417$, y cuántos de sus dígitos correctos son exactamente iguales a los correspondientes dígitos de π.

¿Para determinar los dígitos correctos, necesitamos conocer el valor de x^*?
¡No necesariamente!, como muestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO.-

a) Sabemos que x y una aproximación de él, x^*, están ambos en el intervalo
$I = [\ 23.456125, 23.456438\ ]$ ¿Cuántos dígitos correctos tiene $x^?$

b) ¿Con cuántos dígitos significativos debemos calcular x^* para garantizar que tenga la cantidad t de dígitos correctos determinada en el a)?, ¿cuáles pueden ser estos dígitos?

EJEMPLO.-

a) Sabemos que x y una aproximación de él, x^*, están ambos en el intervalo
$I = [\ 0.001\,989\,78, 0.002\,099\,63\ ]$ ¿Cuántos dígitos correctos tiene $x^?$

b) ¿Con cuántos dígitos significativos debemos calcular x* para garantizar que tenga la cantidad t de dígitos correctos determinada en el a)?, ¿cuáles pueden ser estos dígitos? OBS.- $t = 0$.

EJERCICIO.- Sabemos que x y una aproximación de él, x^*, están ambos en el intervalo [2.9999, 3.0000456] ¿Cuántos dígitos correctos tiene x^*?

DETERMINACIÓN DE LA CANTIDAD t DE DÍGITOS CORRECTOS

En los ejemplos anteriormente hechos hemos seguido el siguiente PROCEDIMENTO

1) Acotar el error absoluto con una cota k de la forma 0.5×10^{e}.
2) Establecer la ecuación $m - t + 1 = e$.
3) De x, o de información sobre él, obtener el valor de m.
4) Sustituir el valor de m en la ecuación para plantear una ecuación lineal en la incógnita t.
5) Resolver algebraicamente la ecuación lineal para obtener el valor buscado de t.

Como hemos visto, a partir de conocer una cota k es posible determinar el número t de primeros dígitos correctos en una aproximación x. Al revés, también podemos, a partir de conocer que los primeros t dígitos significativos son correctos, determinar una cota k del error absoluto en la aproximación x. Esto último podemos hacerlo directamente, usando la definición de dígitos correctos, o usando un procedimiento; ilustramos ambas maneras a continuación.

EJEMPLOS.-

a) Se sabe que $x^* = 1\,640.691\,035\,02$ tiene sus primeros 7 dígitos significativos *correctos*, ¿cuál es una cota k de su error absoluto?

b) Se sabe que $x^* = 0.000\,003\,190\,620\,21$ tiene sus primeros 4 dígitos significativos *correctos*, ¿cuál es una cota k de su error absoluto?

El siguiente ejemplo es importante, pues presenta e ilustra un tipo de planteamiento de resolución que estaremos usando durante el curso, cuándo queramos saber *de antemano* el número de "pasos" de aplicación de un algoritmo necesario para generar una respuesta que cumpla con la condición de que su error es tal que, $|E| \leq tol$, donde la tolerancia *tol* es dada.

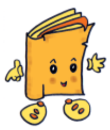
EJEMPLO.- ¿Con cuántos dígitos significativos *correctos* se debe calcular una aproximación de $\sqrt{19}$ para *asegurar* que dicha aproximación x* tiene un error máximo o límite de error de 3×10^{-5}?

EJEMPLO.- Se sabe que un número exacto *x*, pero desconocido, se encuentra en el intervalo I = [0.403 264 25, 0.403 708 38] y se quiere dar una aproximación de él, *x**, en dicho intervalo para la que podamos *tener la esperanza* que tiene una cota o límite de error de 6.38×10^{-4}. ¿Con cuántos dígitos significativos hay que calcular *x**?

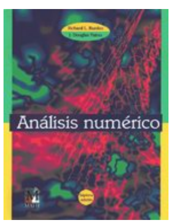
EJEMPLO.- ¿Con cuántos dígitos significativos se debe calcular una aproximación de $\sqrt{123}$ para poder *tener la esperanza* de que dicha aproximación *x** tiene un error máximo de 2.5×10^{-8}?

EJERCICIO.- ¿Con cuántos dígitos significativos se debe calcular una aproximación de $\sqrt{29}$ para poder *tener la esperanza* de que dicha aproximación *x** tiene una cota del error absoluto de 7×10^{-4}?

EJERCICIO.- ¿Con cuántos dígitos significativos correctos se debe calcular una aproximación de 1/13 para *asegurar* que dicha aproximación *x** tiene un error máximo de 4.5×10^{-6}?

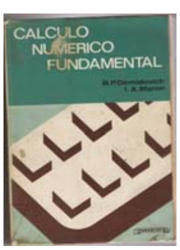


Para consultas se recomiendan los siguientes libros; en particular el último para el concepto de dígitos correctos.



R.L. BURDEN y J.D. FAIRES, Análisis numérico, 7ª ed.; THOMSON LEARNING 2002.

S. C. CHAPRA y R. P. CANALE, Métodos Numéricos para Ingenieros, 4ª ed.; McGraw-Hill 2003.



B.P. DEMIDOVICH & I.A. MARON, Cálculo Numérico Fundamental; Paraninfo 1988.